

التمرين الأول

نعتبر التكامل $I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2} dx$ (1) بين وجود التكامل

(2) بين أن $I_n \geq 0$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) وأحسب $I_{n+1} + I_n$ ثم حدد I_0, I_1, I_2 ;

(3) أدرس رتبة $(I_n)_n$ و بين أن $0 \leq I_n \leq \frac{1}{2n+1}$ وحدد $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$

التمرين الثاني

لكل n من \mathbb{N} و $n \geq 2$ نضع $I_n = n \int_1^\pi \frac{\sin x}{x^n} dx$

(1) باستعمال المكاملة بالأجزاء بين أن $I_n = \frac{n}{n-1} \left[\sin(1) + \int_1^\pi \frac{\cos x}{x^{n-1}} dx \right]$

(2) أ- بين أن : $\left| \int_1^\pi \frac{\cos x}{x^{n-1}} dx \right| \leq \int_1^\pi \frac{dx}{x^{n-1}}$

ب- بين أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^\pi \frac{dx}{x^{n-1}} = 0$ ثم حدد $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$

التمرين الثالث

لكل n من \mathbb{N}^* نضع $I_n = \int_0^{\frac{1}{2}} (1-2t)^n e^{-t} dt$

(1) أ- بين أن $(1-2t)^n e^{-t} \leq (1-2t)^n \leq \frac{1}{\sqrt{e}} (1-2t)^n$ $\forall t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$; $\forall n \in \mathbb{N}^*$

ب- استنتج أن $\frac{1}{2\sqrt{e}(1+n)} \leq I_n \leq \frac{1}{2(n+1)}$ لكل n من \mathbb{N}^* ثم حدد $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$

(2) باستعمال مكاملة بالأجزاء : أ- أحسب I_1

ب- بين أن لكل n من \mathbb{N}^* : $I_{n+1} = 1 - 2(n+1)I_n$

(3) استنتج حساب $I_2 ; I_3$

التمرين الرابع

(1) نعتبر التكاملين $I(x) = \int_0^x \frac{t^2}{1+t} dt$ و $J(x) = \int_0^x \frac{-t^3}{1+t} dt$ حيث x عدد حقيقي من \mathbb{R}^+

أ- أحسب $I(x) ; J(x)$

ب- استنتج أن $(\forall x \in \mathbb{R}^+) : x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

(2) لتكن الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^+ - \{1\}$ بما يلي : $\begin{cases} g(x) = \frac{x \ln x}{x-1} ; x \in \mathbb{R}^+ - \{1\} \\ g(1) = 1 \end{cases}$

بين أن قابلة للاشتقاق على يمين النقطة 1